



Erros de matemática podem levar ao desastre

JOSÉ MATOS

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DO PORTO

jma@isep.ipp.pt

O título deste trabalho é retirado da frase de abertura do artigo intitulado “The Excel Depression”, da autoria do Nobel da Economia de 2008, Paul Krugman, publicado em 18 de abril 2013 no The New York Times. No seu artigo, Krugman começa por fazer uma breve referência a dois desastres provocados por erros numéricos e passa ao desenvolvimento explicando o caso de um trabalho de economia, muito referido e citado, que entre outros erros, inclui uma utilização errada de estatística. Além de detalhar os exemplos referidos por Krugman, nas linhas seguintes são referidos e detalhados outros exemplos de desastres provocados por erros numéricos. Os últimos casos apresentados, retirados de contratos de parcerias público-privadas, também podem considerar-se relacionados com a depressão económica.

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas seis décadas, com a generalização dos instrumentos de cálculo automático, cientistas, economistas e engenheiros tornaram-se cada vez mais independentes de volumosos processos de cálculo numérico. Além de limitados e enfadonhos, os processos de cálculo baseados no papel e no

lápiz são impraticáveis em tempo útil em muitas aplicações atuais. Em problemas que envolvem um grande volume de dados, na resolução de sistemas de grande dimensão e na utilização de métodos numéricos em equações diferenciais em derivadas parciais, por exemplo, podemos até dizer que a resolução só é possível com sofisticados instrumentos de cálculo de elevado desempenho.

No entanto, este afastamento do cálculo de papel e lápis, como todos os professores e encarregados de educação já perceberam, tem a desvantagem de reduzir a sensibilidade aos resultados numéricos. Simultaneamente, a utilização de algoritmos de cálculo sofisticados, por vezes sem que os utilizadores conheçam os limites à sua utilização, dificulta a análise crítica dos resultados.

Na literatura encontramos exemplos de desastres devidos à utilização de algoritmos numéricos fora do contexto para que foram preparados, mas também devidos à simples acumulação de erros de arredondamento ou até à representação errada de resultados. Vamos ver que alguns desastres resultam da utilização de fórmulas erradas, outros da utilização errada de fórmulas.

2. ERROS ORIGINADOS NA REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA

Podemos encontrar relatos de desastres originados em erros de representação numérica, ou porque tal representação não tem precisão suficiente ou porque tal representação não é convenientemente interpretada.

Ao contrário do que se possa pensar, este não é um problema específico da nossa era da informação. Nas polémicas que envolveram a alteração dos sistemas legais de unidades para o sistema decimal, aparecem referências [1] aos perigos de colocação errada da vírgula, ver figura 1.

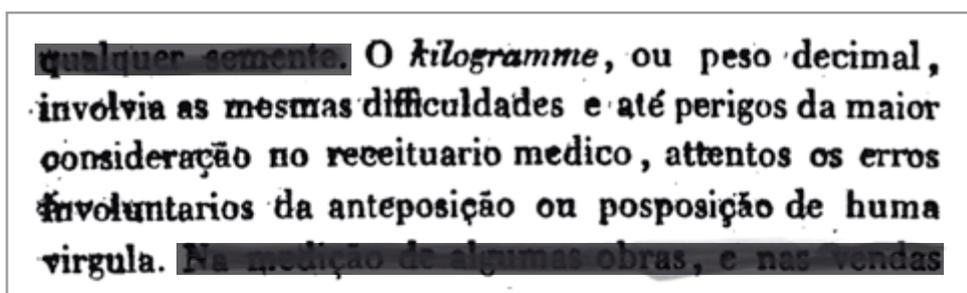


Figura 1: Perigos da maior consideração no receituário médico.

2.1. Erro na órbita da sonda Mars Climate Orbiter

Quase dois séculos depois deste aviso, permanecem dificuldades na utilização do sistema decimal de unidades. Exemplo deste facto é o caso de uma organização da dimensão da NASA, capaz de planear e enviar sondas para diversos planetas do Sistema Solar e que perdeu uma sonda por um erro na interpretação do sistema de unidades.

O caso da sonda Mars Climate Orbiter (MCO), que se perdeu ao entrar na órbita do planeta Marte, é detalhado no relatório apresentado pela comissão de investigação ao acidente [2]. Durante os nove meses de viagem, da Terra a Marte, foram realizadas periodicamente manobras de correção de rota (AMD - Angular Momentum Desaturation). Estas manobras realizaram-se com uma frequência entre 10 e 14 vezes superior ao previsto, tendo esta falha de previsão resultado de uma assimetria nos painéis solares da sonda. Este elevado

número de correções realizadas durante a viagem e o facto de existir um pequeno erro de cálculo neste processo resultaram numa grande acumulação de erros na manobra de correção de trajetória final (TCM-4) da sonda.

O erro resultou de os dados de leitura da rota serem registados na unidade inglesa *pound force* e o *software* que tratava os dados assumia que estes estariam registados em *newton*. Esta discrepância na leitura das variações de velocidade da sonda, $\Delta V = 4,45$ (1 *pound force* = 4,45 *newton*), resultou num erro de 170km na manobra de entrada na órbita de Marte. Conforme se ilustra na figura 2, a entrada em órbita foi planeada para ocorrer a 226 km de altitude, tendo ocorrido 49 segundos mais cedo do que o previsto e a apenas 57 km de altitude.

Em vez de cumprir os fins para que foi enviada, a sonda perdeu-se, e com ela perderam-se 125 mil milhões de dólares.

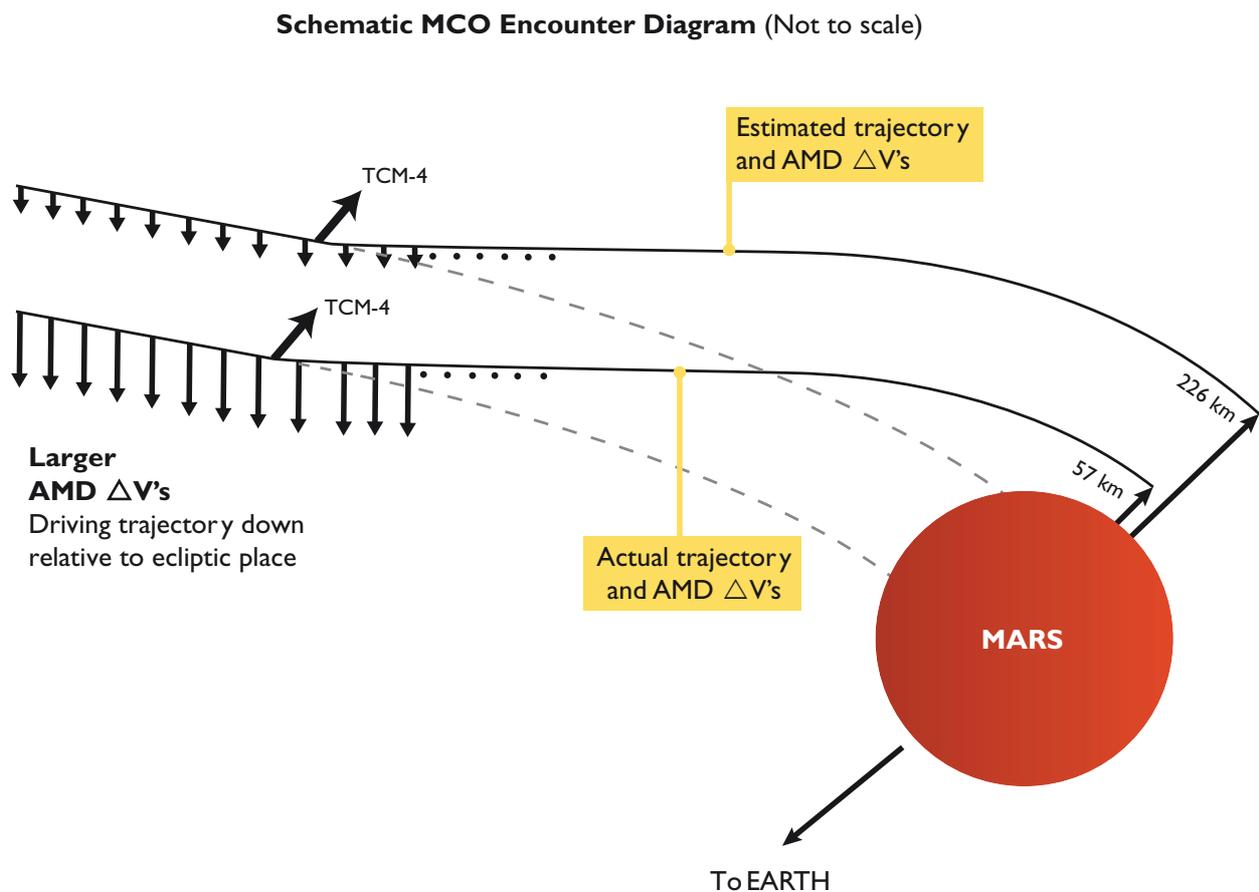


Figura 2: Erro na manobra de correção de trajetória da sonda [2].

2.2. Explosão de um Ariane 5

Em 4 de junho de 1996, apenas 39 segundos após o início das operações de voo e a uma altitude de 3,7 km, naquele que seria o primeiro lançamento de um Ariane 5, o foguetão saiu da sua rota, quebrou-se e explodiu. A Agência Espacial Europeia promoveu um inquérito, tendo concluído que a explosão se deveu a um erro de conversão numérica.

Segundo o relatório do inquérito ao acidente [3], o *software* de controle da velocidade instalado no Ariane 5 é o mesmo *software* instalado no Ariane 4. Por uma questão de segurança, o sistema de controle inclui diversos componentes duplicados, funcionando em paralelo e de forma independente. Este é o caso do Inertial Reference System (SRI), que existe em duplicado, cada unidade com o seu próprio computador e medindo ângulos e velocidades de voo de forma independente.

O acidente resultou de um erro de *overflow* nos computadores das unidades SRI. O facto de este *software* estar desenhado para o Ariane 4, conjugado com o facto de o Ariane 5 ter uma trajetória inicial com componente de velocidade horizontal consideravelmente mais elevada, provocou a sucessão de erros que culminou no desastre. Quando, durante a execução de um algoritmo, o resultado de uma operação aritmética ultrapassa os limites de representação da máquina que o executa, o resultado designa-se por *overflow*. Ocorre um erro se o programa não estiver protegido contra este resultado. Neste acidente, o erro de *overflow* ocorreu durante a operação de conversão de um valor representado em vírgula flutuante de 64 *bits* para um inteiro de 16 *bits* e do facto de o valor representado em 64 *bits* ultrapassar o maior inteiro representável em 16 *bits*

$$+1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{14} = 2^{15} - 1 = 32767$$

O erro custou mais de 7,5 mil milhões de euros à Agência Espacial Europeia.

2.3. Erro de arredondamento altera composição do parlamento

Não se tratando exatamente de um desastre, dependendo do ponto de vista de quem ficou a ganhar ou a perder, em 5 de abril de 1992, um erro de arredondamento alterou a distribuição de mandatos para o parlamento estadual alemão do Schleswig-Holstein.

A lei eleitoral deste Estado diz que, independentemente da distribuição de votos, os partidos com votação inferior

a 5% não têm representação parlamentar. Efetuada a contagem de votos, registaram-se 5% de votos para o partido Os Verdes. A distribuição proporcional de mandatos originou grande dispersão e nenhum partido obteve maioria absoluta.

No dia seguinte, alguém resolveu verificar os cálculos e concluiu que o resultado d'Os Verdes foi 4,97%. A lei eleitoral excluiu este partido do parlamento estadual, os lugares foram redistribuídos e o SPD obteve metade dos mandatos mais um, isto é, maioria absoluta para formar Governo estadual.

Este erro resultou apenas do formato de escrita dos resultados, estando o *software* programado para arredondar as percentagens a um algarismo decimal [5].

3. ACUMULAÇÃO DE ERROS

Com alguma frequência, pequenos erros em operações de cálculo intermédias dão origem a erros desastrosos no resultado final. Este foi o caso de um erro de cálculo na trajetória de um míssil, com a consequente perda de vidas humanas.

3.1. Falha no sistema antimíssil Patriot

Em 25 de fevereiro de 1991, no decorrer da primeira Guerra do Golfo, um erro de 9.5×10^{-8} segundos, no registo de tempo de uma componente do sistema de defesa antimíssil Patriot, originou um erro de centenas de metros no cálculo da trajetória de um míssil *scud* do Iraque, tendo morrido 28 soldados americanos.

O sistema registava o tempo 10 vezes por segundo, em sistema de vírgula fixa de 24 *bits*. Uma vez que o valor 1/10 constitui uma dízima infinita em base 2, a sua representação numa máquina binária é necessariamente aproximada. No caso de 24 *bits*,

$$\begin{aligned} 0.1_{10} &\approx .00011001100110011001100_2 \\ &= 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-8} + 2^{-9} + 2^{-12} + 2^{-13} + 2^{-16} \\ &\quad + 2^{-17} + 2^{-20} + 2^{-21} \\ &= \frac{209715}{2097152} \end{aligned}$$

resultando no erro

$$\frac{1}{10} - \frac{209715}{2097152} = \frac{1}{10485760} \approx 9.5 \times 10^{-8}$$

O Patriot foi projetado para trabalhar na Guerra Fria, na Europa, como defesa contra mísseis cujas velocidades não chegavam aos 2500 km/h, montados em plataformas por-

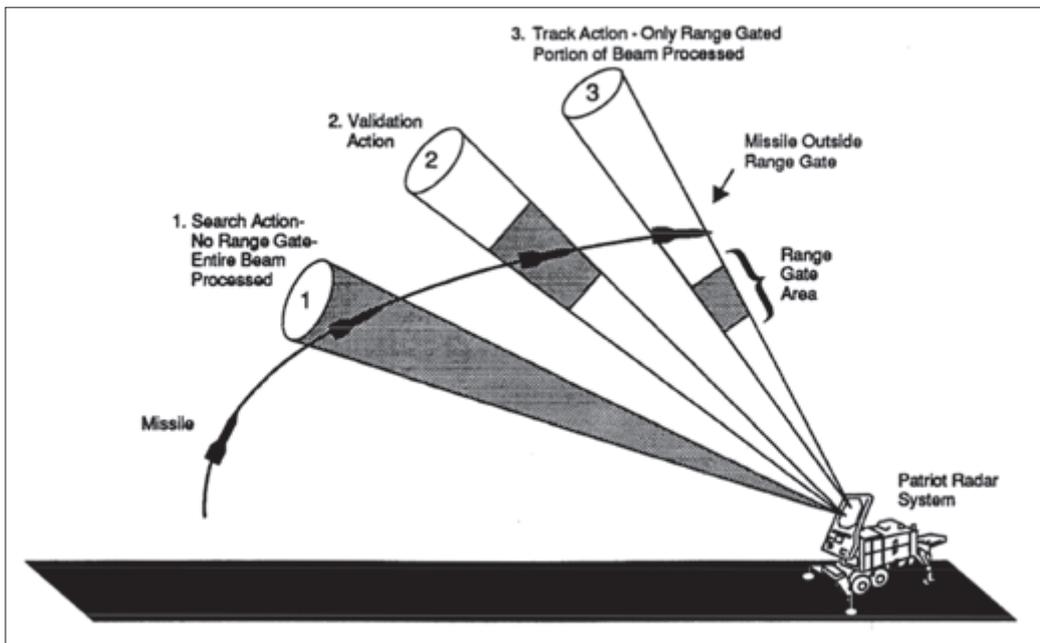


Figura 3: Erro no cálculo da trajetória do míssil [4].

táteis e pensados para funcionar por pequenos períodos de tempo. Na Guerra do Golfo o sistema foi instalado em plataformas fixas, como defesa de posições fixas, contra mísseis *scud* com velocidades superiores a 6 mil km/h. O erro ocorreu após mais de 100 horas de funcionamento ininterrupto da bateria [4]. Ao fim deste tempo, o erro acumulado

$$100 \times 60 \times 60 \times 10 \times \frac{1}{10485760} = \frac{653}{1902} \approx 0.343s$$

provocou um erro de 687 m no cálculo da trajetória e o míssil perdeu-se do radar.

4. ERROS NAS FÓRMULAS E NA SUA UTILIZAÇÃO

Por descuido, por acidente ou deliberadamente, encontramos a utilização de fórmulas de cálculo que não calculam aquilo que se diz ou que não justificam os seus resultados. Nos casos seguintes, podemos constatar que as consequências de tais erros podem conduzir ao desastre financeiro e podem ser muito mais determinantes nas nossas vidas do que esperaríamos.

4.1. Pagamentos por disponibilidade em PPP

Estipula o decreto-lei nº 44/2010 de 5 de maio que as concessionárias das autoestradas Ex-SCUT passem a ser retribuídas pela disponibilidade das infraestruturas. A componente da remuneração anual pela disponibilidade é calculada nos termos da fórmula

$$Dis_t = \sum_j td_t \times \frac{IPC_{Dez_{t-1}}}{IPC_{Dez_{2009}}} \times nd_t(j) \times \frac{L_j}{L_{Total}} \quad (1)$$

onde td_t é o valor da tarifa diária de disponibilidade no ano t , $nd_t(j)$ o número de dias do ano t em que o sublanço j se encontrou em serviço, IPC_{Dez_t} representa o índice de preços no consumidor em dezembro do ano t , L_j a extensão do sublanço j e L_{Total} a soma das extensões dos sublanços que integram a concessão [6].

Uma vez que estes contratos foram assinados depois de todos os sublanços se encontrarem ao serviço, logo $nd_t(j) = 365$ para todos os valores j , e porque por definição $\sum_j L_j = L_{Total}$, então a fórmula anterior é algebricamente equivalente a

$$Dis_t = td_t \times \frac{IPC_{Dez_{t-1}}}{IPC_{Dez_{2009}}} \times 365. \quad (2)$$

Prescindindo do quociente L_j/L_{Total} , a fórmula (2) é numericamente estável, ao contrário da fórmula (1), que é numericamente instável. De facto, uma vez que $td_t \times \frac{IPC_{Dez_{t-1}}}{IPC_{Dez_{2009}}} \times nd_t(j)$ é da ordem de grandeza das dezenas de milhões de euros [7], um erro ϵ de arredondamento no quociente em (1) produz um erro de $10^7 \times \epsilon$ euros no resultado final. Concluímos que a utilização da fórmula instável é potencialmente danosa, especialmente se os cálculos intermédios não forem efetuados com pelo menos nove algarismos significativos. Acresce que o texto é omissivo quanto aos procedimentos de cálculo a adotar.

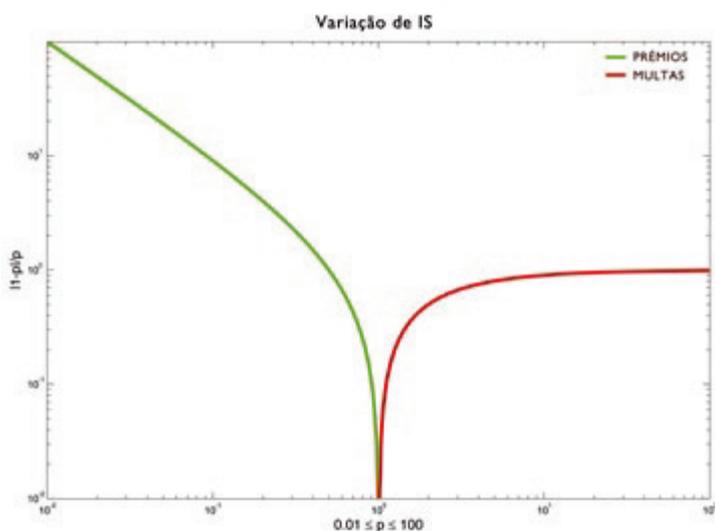


Figura 4: Prémios e multas devidos por variação dos índices de sinistralidade.

4.2. Prémios e multas por variação do índice de sinistralidade

Os mesmos contratos estipulam que, conforme o índice de sinistralidade de uma concessionária $IS_t(Conc)$ é menor ou é maior do que o índice de sinistralidade ponderado com as restantes concessionárias $IS_t(\text{ponderado})$ no ano t , então a concessionária recebe um prémio calculado segundo a fórmula

$$Sin_t = 2\% \times Dis_t \times \frac{IS_{t-1}(\text{ponderado}) - IS_t(Conc)}{IS_t(Conc)}$$

ou paga uma multa calculada pela fórmula simétrica.

Esta fórmula inclui dois erros, um no numerador e outro no denominador. O facto de existir um desfazamento temporal de um ano entre os índices de sinistralidade do numerador viabiliza a existência de prémios e de multas com sinal negativo, sempre que o índice de sinistralidade de uma concessionária é menor do que o ponderado num ano e maior no ano seguinte ou vice-versa.

O outro erro consiste na escolha do denominador, que pode ser nulo. Para ilustrar o que pode resultar desta fórmula, defina-se $p = \frac{IS_t(Conc)}{IS_{t-1}(\text{ponderado})}$, de que resulta

$$Sin_t = 2\% \times Dis_t \times \frac{1-p}{p}, \text{ se } IS_{t-1}(\text{ponderado}) \neq 0,$$

fórmula que representa uma hipérbole, o que permite concluir que os valores dos prémios e das multas são calculados utilizando escalas diferentes. Com efeito, os prémios, atribuídos quando o denominador é pequeno, são calculados no intervalo que contém a assíntota vertical e as multas, quando

o denominador cresce, tendem para a assíntota horizontal.

Na figura 4 representa-se em escala logarítmica o gráfico de $\frac{1-p}{p}$, para $p \in [0.01, 100]$.

Para uma concessionária com taxa de disponibilidade diária de 130 mil euros, a remuneração anual por disponibilidade é $Dis = 47,45$ milhões de euros. Na tabela seguinte apresentam-se alguns valores de prémios e de multas, juntamente com a remuneração anual desta concessionária, em função do valor de p .

A existência de autoestradas com índices de sinistralidade de zero (acidentes com mortos ou feridos graves), ou valores muito próximos de zero, pode estar na origem dos sistemáticos desvios entre os encargos previstos com PPP rodoviárias e os encargos realmente suportados pelo Estado [8].

p		Sin_t	$Dis_t \pm Sin_t$	$(Dis_t \pm Sin_t)/Dis_t$
100	multas	939 510€	46 510 490€	98,02%
10		854 100€	46 595 900€	98,20%
2		474 500€	46 975 500€	99,00%
1		0€	47 450 000€	100%
0.5	prémios	949 000€	48 399 000€	102,00%
0.1		8 541 000€	55 991 000€	118,00%
0.01		93 951 000€	141 401 000€	298,00%
0		∞	∞	

Tabela 1: Prémios e multas por variação de sinistralidade Sin_t e remuneração anual $Dis_t \pm Sin_t$, de uma concessão com 130 mil euros de tarifa de disponibilidade diária, como função da razão entre os índices de sinistralidade da concessão e o ponderado.

4.3. Crescimento em tempo de débito

No seu artigo do *The New York Times* [9], Paul Krugman disserta sobre a possibilidade de um erro de utilização de Excel poder destruir as economias do Mundo Ocidental. Supostamente, existem erros na base da principal conclusão de um muito citado artigo de economia. A conclusão do artigo [10] é a de que existe um limiar de 90% do Produto Interno Bruto de um país que, quando ultrapassado pela dívida pública, provoca uma queda brusca no respetivo crescimento económico. A relação com o Excel reside no facto de ter sido este o *software* utilizado nos cálculos.

Segundo investigadores de economia [11]-[12], existem er-

ros no trabalho de Reinhart and Rogoff, tendo sido identificados erros de código, exclusão seletiva de dados disponíveis e uma utilização não justificada de pesos utilizados no cálculo de médias. Além disso, segundo este estudo, a utilização de longas séries de dados, com lacunas e imperfeições, foi descuidada e incompleta, ignorando especificidades históricas e ignorando padrões temporais. Corrigidos os erros, as conclusões são de que a aparente não linearidade entre déficite público e crescimento do PIB constitui uma especificidade histórica e que a relação entre estas duas variáveis económicas é mais fraca em anos recentes do que em períodos mais remotos.

Mas uma utilização tendenciosa de resultados imprecisos ou parciais, baseados em falsas estatísticas, é desde há muito tempo uma frequente falsificação.

REFERÊNCIAS

[1] J.D. Mascarenhas, et al. (1819), “Memoria Sobre as Medidas e o Peso de Portugal comparadas com as Medidas e o Peso actuaes da França”, *Annaes das Sciencias das Artes e das Letras*, Volume 5, Paris, 1815

[2] A.G. Stephenson, et al. (1999), “Mars Climate Orbiter Mishap Investigation Board”, Jet Propulsion Laboratory, Washington, DC (ftp://ftp.hq.nasa.gov/pub/pao/reports/1999/MCO_report.pdf), consulta em 7 de maio de 2013

[3] J.L. Lions (1996), “Ariane 5, Flight 501 Failure”, Report by the Inquiry Board, <http://www.ima.umn.edu/~arnold/disasters/ariane5rep.html>, consulta em 8 de maio de 2013

[4] M. Blair, S. Obenski, P. Bridickas (1992), “Patriot Missile Software Problem”, Information Management and Technology Division, General Accounting Office, Washington, DC (<http://www.fas.org/spp/starwars/gao/im92026.htm>), consulta em 10 de maio de 2013

[5] D. Weber-Wulff (1992), “Rounding error changes Parliament makeup”, in *The Risk Digest*, ACM Committee on Computers and Public Policy, <http://catless.ncl.ac.uk/Risks/13.37.html#subj4>, consulta em 10 de maio de 2013

[6] <http://dre.pt/pdf1sdip/2010/05/08701/0000300069.pdf>, consulta em 11 de maio de 2013

[7] J. Matos, P. Morais e F. Miranda (2013), “Errors and Numerical Instabilities in Portuguese Public-Private Partnership contracts”, em preparação

[8] Parcerias Público-Privadas e Concessões - Relatório de 2012, Direcção-Geral do Tesouro e Finanças, http://www.dgdf.pt/ResourcesUser/PPP/Documents/Relatorios/2012/Relatorio_Anuar_PPP_2012.pdf, consulta em 11 de maio de 2013

[9] P. Krugman (2013), “The Exel Depression”, *The New York Times*, http://www.nytimes.com/2013/04/19/opinion/krugman-the-excel-depression.html?_r=0, consulta em 3 de maio de 2013

[10] C.M. Reinhart and K.S. Rogoff (2010), “Growth in a time of debt”, NBER Working Paper Series, <http://www.nber.org/papers/w15639.pdf>, consulta em 13 de maio de 2013

[11] M. Konczal (2013), “Researchers finally replicated Reinhart-Rogoff, and there are serious problems”, *Next New Deal the Blog of the Roosevelt Institute*, <http://www.nextnewdeal.net/rortybomb/researchers-finally-replicated-reinhart-rogoff>, consulta em 13 de maio de 2013

[12] T. Herndon, M. Ash and R. Pollin (2013), “Does High Public Debt Consistently Stifle Economic Growth? A Critique of Reinhart and Rogoff”, Political Economy Research Institute, University of Massachusetts Amherst, Workingpaper series, no 322, April 2013, http://www.peri.umass.edu/fileadmin/pdf/working_papers/working_papers_301-350/WP322.pdf, consulta em 13 de maio de 2013

SOBRE O AUTOR

José Matos é Professor Coordenador do Departamento de Matemática e integra o Laboratório de Engenharia Matemática do Instituto Superior de Engenharia do Porto. É também investigador do Centro de Matemática da Universidade do Porto. É doutorado em Matemática Aplicada pela Universidade do Porto, com uma tese em Análise Numérica, tem trabalhado em aproximação de funções, propagação de erros e estabilização de algoritmos. É docente e subdiretor do mestrado em Matemática Aplicada à Engenharia e às Finanças do Instituto Superior de Engenharia do Porto.